20019

Klausur: [redacted] Operations Research **Sommersemester 2010**

Prüfer: Prof. Dr. F. Werner

Zugelassene Hilfsmittel:

- 2 A-4 Blätter (mit beliebigem Material)
- Taschenrechner

Die Aufgabenstellung umfasst 4 Aufgaben, die alle zu bearbeiten sind. Die Angabe des Resultats allein ist nicht ausreichend. Der Rechenweg zum Erhalt der Lösung muss ersichtlich sein!

Aufgabenstellung:

1. Gegeben sei das folgende (binäre) Rucksackproblem:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} 4x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & + & 10x_5 & + & 6x_6 & \rightarrow & \max! \\ 5x_1 & + & 9x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & + & 5x_5 & + & 2x_6 & \leq & 17 \end{array}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_6 \in \{0, 1\}$$

(a) Bestimmen Sie eine untere Schranke mittels LP-Relaxation für das Teilproblem der 2. Stufe des Verzweigungsbaumes, falls die beiden Komponenten $x_1 = 1$ und $x_2 = 1$ fixiert sind (die restlichen Variablen sind beliebig).

(b) Bestimmen Sie eine obere Schranke für die Wurzel des Verzweigungsbaumes mittels Greedy-Algorithmus. Kann das unter (a) betrachtete Teilproblem eine optimale Lösung enthalten?

(12 Punkte)

2. Gegeben sei das folgende binäre Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 6x_5 & \rightarrow & \min! \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & 7x_3 & + & 3x_4 & - & x_5 & \geq & 6 \\ -3x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & + & 8x_5 & \geq & 10 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \ldots, x_5 \in \{0, 1\}$$

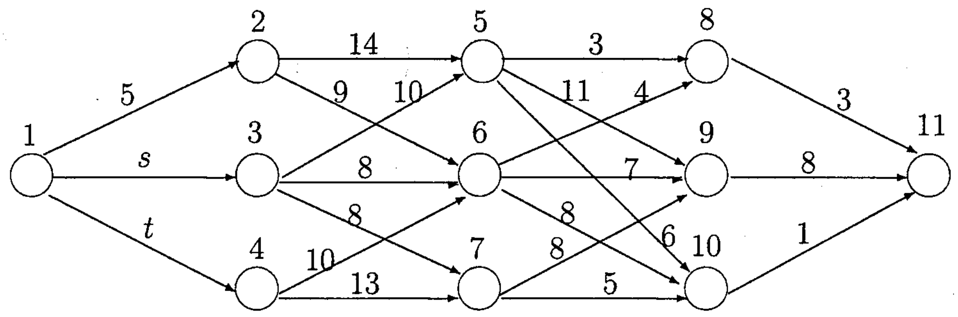
Die Startlösung sei $\mathbf{x^0} = (0, 0, 1, 0, 1)^T$.

(a) Bestimmen Sie den besten zulässigen Nachbarn von $\mathbf{x^0}$ in der Nachbarschaft $N_1(\mathbf{x^0})$. Wird dieser bei iterativer Verbesserung als neue Startlösung akzeptiert?

(b) Wie viele zulässige Nachbarn hat $\mathbf{x^0}$ in der Nachbarschaft $N_2(\mathbf{x^0})$?

(12 Punkte)

3. Um von Ort (Knoten) 1 zum Ort (Knoten) 11 zu gelangen, gibt es die in der folgenden Skizze dargestellten Verbindungen, die jeweils aus 4 Teilstrecken bestehen:



Die Knoten sind mit den Orten und die Bögen mit den Werten c_{ij} markiert, die die Fahrzeiten einer Reise vom Ort i zum Ort j angeben.

(a) Bestimmen Sie die kleinste Gesamtfahrzeit von Ort 1 zu Ort 11 in Abhängigkeit von den Parametern $c_{13} = s$ und $c_{14} = t$ mittels dynamischer Optimierung (die Umsteigezeiten in jedem Knoten werden als konstant angesehen und daher vernachlässigt).

(b) Für welche Werte $s \in \{6, 7\}$ und $t \in \{4, 5\}$ ist die Strecke mit der kürzesten Fahrzeit **eindeutig** bestimmt (Angabe der Lösungen ist nicht erforderlich)?

(c) Geben Sie für $s = 7, t = 5$ **alle** Strecken mit kürzester Fahrzeit an.

(14 Punkte)

4. Ein Call-Center habe 3 Angestellte, die Anfrufe beantworten. Zusätzlich kann ein Anrufer in einer Warteleitung bleiben. Sind alle diese Leitungen belegt, hört der Anrufer das Besetztzeichen. Es seien die Ankunftsrate $\alpha = 6$ und die Bedienungsrate $\beta = 5$ (pro Minute) bekannt. Die Zufallsvariablen der Zwischenankunftszeit und der Servicezeit seien exponentialverteilt.

   Gesucht sind die stationären Wahrscheinlichkeiten, dass

   (a) ein Anrufer sofort mit einem Angestellten sprechen kann;

   (b) ein Anrufer das Besetztzeichen hört.

   (12 Punkte)