Formelsammlung für schriftliche Prüfung: Einführung in die Ökonometrie

1 A-, B- und C-Annahmen

Annahme A1 Im ökonometrischen Modell fehlen keine relevanten exogenen Variablen und die benutzten exogenen Variablen sind nicht irrelevant.

Annahme A2 Der wahre Zusammenhang zwischen $x_{1t}, x_{2t}, \ldots, x_{Kt}$ und y_t ist linear.

Annahme A3 Die $K+1$ Parameter $\alpha, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_K$ sind für alle T Beobachtungen $(x_{1t}, x_{2t}, \ldots, x_{Kt}, y_t)$ konstant.

Annahme B1 $E(u_t) = 0$, für $t = 1, 2, ..., T$.

Annahme B2 $var(u_t) = \sigma^2$, für $t = 1, 2..., T$.

Annahme B3 $cov(u_t, u_s) = 0$, für alle $t \neq s$ sowie $t = 1, 2, ..., T$ und $s = 1, 2, .., T$.

Annahme B4 Die Störgrößen u_t sind normalverteilt.

Annahme C1 Die exogenen Variablen $x_{1t}, x_{2t}, \ldots, x_{Kt}$ sind keine Zufallsvariablen, sondern können wie in einem Experiment kontrolliert werden.

Annahme C2 Es existieren keine Parameterwerte $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_K$ (wobei mindestens ein $\gamma_k \neq 0$), so dass zwischen den exogenen Variablen $x_{1t}, x_{2t}, ..., x_{Kt}$ für alle $t = 1, 2, ..., T$ die folgende lineare Beziehung gilt:

$$\gamma_0 + \gamma_1 x_{1t} + \gamma_2 x_{2t} + ... + \gamma_K x_{Kt} = 0 \, .$$

2 Statistik

Stichproben

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t \\
\widehat{var}(x) &= \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(x_t - \overline{x})^2 = \frac{1}{T-1}S_{xx} \\
\widehat{se}(x) &= \sqrt{\widehat{var}(x)} \\
\widehat{cov}(x,y) &= \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(x_t - \overline{x})(y_t - \overline{y}) = \frac{1}{T-1}S_{xy} \\
\widehat{cor}(x,y) &= \frac{\widehat{cov}(x,y)}{\widehat{se}(x)\cdot\widehat{se}(y)} = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}}\sqrt{S_{yy}}}
\end{aligned}$$

Zufallsvariablen

$$\begin{aligned}
E(u) &= \sum_{i=1}^{N} f(u_i)\cdot u_i \\
var(u) &= \sum_{i=1}^{N} f(u_i)\,(u_i - E(u))^2 = E\left[(u - E(u))^2\right] \\
se(u) &= \sqrt{var(u)} \\
cov(u_1, u_2) &= \sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2} f(u_{1i}, u_{2j})\cdot\left[(u_{1i} - E(u_1))(u_{2j} - E(u_2))\right] \\
&= E\left[(u_1 - E(u_1))(u_2 - E(u_2))\right] \\
E(x_1 + x_2\cdot u_2) &= x_1 + x_2\cdot E(u_2) \\
var(x_1\cdot u_1 + x_2\cdot u_2) &= x_1^2 var(u_1) + x_2^2 var(u_2) + 2x_1x_2 cov(u_1, u_2)
\end{aligned}$$

3 Einfachregression

Schätzung

$$
\begin{aligned}
S_{yy} &\equiv \sum (y_t - \overline{y})^2 = \sum y_t^2 - T\overline{y}^2 \\
S_{xx} &\equiv \sum (x_t - \overline{x})^2 = \sum x_t^2 - T\overline{x}^2 \\
S_{xy} &\equiv \sum (x_t - \overline{x})(y_t - \overline{y}) = \sum x_t y_t - T\overline{x}\,\overline{y} \\
S_{\widehat{u}\widehat{u}} &\equiv \sum \widehat{u}_t^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{\alpha} &= \overline{y} - \widehat{\beta}\overline{x} \\
\widehat{\beta} &= S_{xy}/S_{xx}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{\widehat{y}\widehat{y}} &= \widehat{\beta} S_{xy} \\
S_{yy} &= S_{\widehat{u}\widehat{u}} + S_{\widehat{y}\widehat{y}}
\end{aligned}
$$

$$R^2 = S_{\widehat{y}\widehat{y}}/S_{yy} = S_{xy}^2/(S_{xx}S_{yy})$$

$$
\begin{aligned}
E(\widehat{\alpha}) &= \alpha & var(\widehat{\alpha}) &= \sigma^2\left(1/T + \overline{x}^2/S_{xx}\right), \\
E\left(\widehat{\beta}\right) &= \beta & var\left(\widehat{\beta}\right) &= \sigma^2/S_{xx} \\
cov\left(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}\right) &= -\sigma^2\left(\overline{x}/S_{xx}\right)
\end{aligned}
$$

$$\widehat{\sigma}^2 = S_{\widehat{u}\widehat{u}}/(T-2)$$

$$\left[\widehat{\beta} - t_{a/2}\cdot\widehat{se}(\widehat{\beta})\ ;\ \widehat{\beta} + t_{a/2}\cdot\widehat{se}(\widehat{\beta})\right]$$

$$\left[\widehat{\alpha} - t_{a/2}\cdot\widehat{se}(\widehat{\alpha})\ ;\ \widehat{\alpha} + t_{a/2}\cdot\widehat{se}(\widehat{\alpha})\right]$$

Hypothesentest (zweiseitiger t-Test)

$$
\begin{aligned}
\Pr\left\{-t_{a/2} \le t \le t_{a/2}\right\} &= 1 - a \\
\text{wobei} \qquad t &= \left(\widehat{\beta} - q\right) \Big/ \widehat{se}(\widehat{\beta})
\end{aligned}
$$

Prognose

$$var(\widehat{y}_0 - y_0) = \sigma^2\left[1 + 1/T + (x_0 - \overline{x})^2/S_{xx}\right]$$

$$\left[\widehat{y}_0 - t_{a/2}\cdot\widehat{se}(\widehat{y}_0 - y_0)\ ;\ \widehat{y}_0 + t_{a/2}\cdot\widehat{se}(\widehat{y}_0 - y_0)\right]$$

4 Zweifachregression

Schätzung

$$
\begin{aligned}
S_{11} &\equiv \sum (x_{1t} - \overline{x}_1)^2 = \sum x_{1t}^2 - T\overline{x}_1^2 \\
S_{22} &\equiv \sum (x_{2t} - \overline{x}_2)^2 = \sum x_{2t}^2 - T\overline{x}_2^2 \\
S_{yy} &\equiv \sum (y_t - \overline{y})(y_t - \overline{y}) = \sum y_t^2 - T\overline{y}^2 \\
S_{12} &\equiv \sum (x_{1t} - \overline{x}_1)(x_{2t} - \overline{x}_2) = \sum x_{1t}x_{2t} - T\overline{x}_1\overline{x}_2 \\
S_{1y} &\equiv \sum (x_{1t} - \overline{x}_1)(y_t - \overline{y}) = \sum x_{1t}y_t - T\overline{x}_1\overline{y} \\
S_{2y} &\equiv \sum (x_{2t} - \overline{x}_2)(y_t - \overline{y}) = \sum x_{2t}y_t - T\overline{x}_2\overline{y}\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{\beta}_1 &= \frac{S_{22}S_{1y} - S_{12}S_{2y}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \\
\widehat{\beta}_2 &= \frac{S_{11}S_{2y} - S_{12}S_{1y}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}
\end{aligned}
$$

$$\widehat{\alpha} = \overline{y} - \widehat{\beta}_1\overline{x}_1 - \widehat{\beta}_2\overline{x}_2$$

$$
\begin{aligned}
var(\widehat{\beta}_1) &= \frac{\sigma^2}{S_{11}(1 - R_{1\cdot 2}^2)} \\
var(\widehat{\beta}_2) &= \frac{\sigma^2}{S_{22}(1 - R_{1\cdot 2}^2)}
\end{aligned}
$$

$$var(\widehat{\alpha}) = \sigma^2/T + \overline{x}_1^2 var(\widehat{\beta}_1) + 2\overline{x}_1\overline{x}_2 cov(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2) + \overline{x}_2^2 var(\widehat{\beta}_2)$$

$$cov(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2) = \frac{-\sigma^2 R_{1\cdot 2}^2}{S_{12}(1 - R_{1\cdot 2}^2)}$$

$$\text{wobei } R_{1\cdot 2}^2 = \frac{S_{12}^2}{S_{11}S_{22}}$$

Prognose

$$
\begin{aligned}
var(\widehat{y}_0 - y_0) &= \sigma^2(1 + 1/T) \\
&\quad + (x_{10} - \overline{x}_1)^2 var(\widehat{\beta}_1) + (x_{20} - \overline{x}_2)^2 var(\widehat{\beta}_2) \\
&\quad + 2(x_{10} - \overline{x}_1)(x_{20} - \overline{x}_2) cov(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2)
\end{aligned}
$$

5 Mehrfachregression

Schätzung

$$
\begin{aligned}
S_{\widehat{u}\widehat{u}} &= S_{yy} - \sum_{k=1}^{K} \widehat{\beta}_k S_{ky} \\
R^2 &= \frac{S_{yy} - S_{\widehat{u}\widehat{u}}}{S_{yy}} = \frac{S_{\widehat{y}\widehat{y}}}{S_{yy}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(\widehat{\beta}_1) &= \beta_1 \\
E(\widehat{\beta}_2) &= \beta_2 \\
E(\widehat{\alpha}) &= \alpha
\end{aligned}
$$

$$\widehat{\sigma}^2 = S_{\widehat{u}\widehat{u}}/(T-K-1)$$

Hypothesentest (F-Test)

$$F = \frac{\left(S^0_{\widehat{u}\widehat{u}} - S_{\widehat{u}\widehat{u}}\right)/L}{S_{\widehat{u}\widehat{u}}/(T-K-1)} \sim F_{(L,T-K-1)}$$

Prognose

$$\left[\widehat{y}_0 - t_{a/2} \cdot \widehat{se}(\widehat{y}_0 - y_0); \widehat{y}_0 + t_{a/2} \cdot \widehat{se}(\widehat{y}_0 - y_0)\right]$$

6 Verletzung der Annahmen

Annahme A1:

Standardisiertes Bestimmtheitsmaß $\overline{R}^2$

$$
\begin{aligned}
\overline{R}^2 &= 1 - \frac{S_{\widehat{u}\widehat{u}}/(T-K-1)}{S_{yy}/(T-1)} \\
&= 1 - \left(1 - R^2\right)\frac{T-1}{T-K-1}
\end{aligned}
$$

Weitere Kennzahlen

$$
\begin{aligned}
AIC &= \ln\left(\frac{S_{\widehat{u}\widehat{u}}}{T}\right) + \frac{2(K+1)}{T} \\
SC &= \ln\left(\frac{S_{\widehat{u}\widehat{u}}}{T}\right) + \frac{(K+1)\ln T}{T} \\
PC &= \frac{S_{\widehat{u}\widehat{u}}\left[1 + (K+1)/T\right]}{T-K-1}
\end{aligned}
$$

Weitere Diagnose-Instrumente: t-Test, F-Test, ungenesteter F-Test, J-Test.

Annahme A2:

Zulässige nicht-lineare Funktionstypen

$$
\begin{aligned}
\ln y_t &= \alpha + \beta \ln x_t + u_t && \text{(logarithmisch)} \\
y_t &= \alpha + \beta \ln x_t + u_t && \text{(semi-logarithmisch)} \\
\ln y_t &= \alpha + \beta x_t + u_t && \text{(exponential)} \\
\ln y_t &= \alpha + \beta\left(1/x_t\right) + u_t && \text{(log-invers)} \\
y_t &= \alpha + \beta\left(1/x_t\right) + u_t && \text{(invers)} \\
y_t &= \alpha + \beta_1 x_t + \beta_2 x_t^2 + u_t && \text{(quadratisch)}
\end{aligned}
$$

Box-Cox-Test

$$
\begin{aligned}
l &= \frac{T}{2}\left|\ln\left(\frac{S^*_{\widehat{u}\widehat{u}}}{S^{**}_{\widehat{u}\widehat{u}}}\right)\right| \sim \chi^2_{(1)}, \\
\text{mit } S^*_{\widehat{u}\widehat{u}} &= \text{Summe der Residuenquadrate des Modells mit } y^*_t \\
S^{**}_{\widehat{u}\widehat{u}} &= \text{Summe der Residuenquadrate des Modells mit } \ln y^*_t
\end{aligned}
$$

Regression Specification Error Test (RESET)

$$F = \frac{\left(S'_{\widehat{u}\widehat{u}} - S^*_{\widehat{u}\widehat{u}}\right)/L}{S^*_{\widehat{u}\widehat{u}}/(T-K^*-1)} \sim F_{(L,T-K^*-1)}$$

Weiteres Diagnoseinstrument: R^2

Annahme A3:

Diagnose-Instrumente: F-Test, prognostischer Chow-Test, t-Test

Annahme B2:

Goldfeld-Quandt Test

$$F = \frac{S^{II}_{\widehat{u}\widehat{u}}/(T_{II}-K-1)}{S^{I}_{\widehat{u}\widehat{u}}/(T_{I}-K-1)},$$

mit $S^{I}_{\widehat{u}\widehat{u}}$ und $S^{II}_{\widehat{u}\widehat{u}}$ Summe der Residuenquadrate der Gruppen I und II

White-Test

$$R^2 T \sim \chi^2_{(v)},$$

wobei ν=Anzahl der Steigungsparameter des Hilfsmodells.

Annahme B3:

AR(1)-Prozeß:

$$
\begin{aligned}
u_t &= \rho u_{t-1} + e_t\,, \qquad -1 < \rho < 1 \\
var(u_t) &= \frac{\sigma_e^2}{1-\rho^2} \equiv \sigma^2 \\
cov(u_t, u_{t-\tau}) &= \rho^\tau \left(\frac{\sigma_e^2}{1-\rho^2}\right) = \rho^\tau \sigma^2 \neq 0
\end{aligned}
$$

Schätzer für ρ

$$
\widehat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{T} \widehat{u}_{t-1}\widehat{u}_t}{\sum_{t=2}^{T} \widehat{u}_{t-1}^2}.
$$

Durbin-Watson Test

$$
\begin{aligned}
d &= \frac{\sum_{t=2}^{T} (\widehat{u}_t - \widehat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{T} \widehat{u}_t^2} \\
&\approx 2(1-\widehat{\rho})
\end{aligned}
$$

- Wenn $d < d_{0,05}^L$, dann lehne $H_0 : \rho \leq 0$ ab und akzeptiere $H_1 : \rho > 0$;
- wenn $d > d_{0,05}^H$, dann lehne $H_0 : \rho \leq 0$ nicht ab;
- wenn $d_{0,05}^L < d < d_{0,05}^H$, dann treffe keine Aussage.

Wenn $H_0 : \rho \geq 0$, dann benutze

$$
\begin{aligned}
d_{0,95}^H &\approx 4 - d_{0,05}^L \\
d_{0,95}^L &\approx 4 - d_{0,05}^H
\end{aligned}
$$

Annahme B4:

Jarque-Bera-Test

$$
\begin{aligned}
\widehat{sym}(u_t) &= \frac{\frac{1}{T}\sum \widehat{u}_t^3}{\left(\frac{1}{T}\sum \widehat{u}_t^2\right)^{3/2}} \\
\widehat{kur}(u_t) &= \frac{\frac{1}{T}\sum \widehat{u}_t^4}{\left(\frac{1}{T}\sum \widehat{u}_t^2\right)^{2}}
\end{aligned}
$$

$$
JB = T\left[\frac{[\widehat{sym}(u_t)]^2}{6} + \frac{\left[\widehat{kur}(u_t) - 3\right]^2}{24}\right] \sim \chi_{(2)}
$$

Annahme C1:

Instrumentvariablen-Schätzer bei Einfachregression:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\beta}^{IV} &= \frac{\sum (z_t - \overline{z})(y_t - \overline{y})}{\sum (z_t - \overline{z})(x_t - \overline{x})} \\
&= \frac{S_{zy}}{S_{zx}} \\
\widehat{\alpha}^{IV} &= \overline{y} - \widehat{\beta}^{IV}\overline{x}
\end{aligned}
$$

$$
\widehat{\beta}^{IV} \sim N\left(\beta, var(\widehat{\beta}^{IV})\right)
$$

wobei

$$
\begin{aligned}
\widehat{var}(\widehat{\beta}^{IV}) &= \frac{\widehat{\sigma}^2 \sum (z_t - \overline{z})^2}{\left[\sum (z_t - \overline{z})(x_t - \overline{x})\right]^2} \\
&= \frac{\widehat{\sigma}^2 S_{zz}}{S_{zx}^2} = \frac{\widehat{\sigma}^2}{S_{xx}} \cdot \frac{S_{xx}S_{zz}}{S_{zx}^2} = \widehat{var}(\widehat{\beta}) \cdot \frac{1}{R_{z\cdot x}^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{\sigma}^2 &= \frac{S_{\widehat{u}\widehat{u}}^{IV}}{T-K-1} \\
\widehat{u}_t &= y_t - \widehat{\alpha}^{IV} - \widehat{\beta}_t^{IV} x_t
\end{aligned}
$$

Spezifikationstest von Hausman:

$$
m = \frac{\left(\widehat{\beta}^{IV} - \widehat{\beta}\right)^2}{\widehat{var}(\widehat{\beta}^{IV}) - \widehat{var}(\widehat{\beta})} \sim \chi_{(1)}^2
$$

Annahme C2:

Diagnose Instrumente: R_{ij}^2, $R_{k\cdot ij}^2$, R^2, t-Tests in Verbindung mit F-Test

7 Weiterführende Themenbereiche

Dynamische Modelle:

Stationärer Prozeß:

1. $E(x_t) = \mu$ für alle $t = 1, 2, ..., T$;
2. $var(x_t) = \sigma_x^2$ für alle $t = 1, 2, ..., T$;
3. $cov(x_t, x_{t+\tau}) = \gamma_\tau$ für alle $t = 1, 2, ..., T$ und alle $\tau = 1, 2, ..., T-1$.

Ökonometrisches Modell:

$$y_t = \alpha + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + ... + \beta_K x_{t-K} + v_t.$$

Langfristiger Multiplikator: $\sum_{k=0}^{K} \beta_k$

geometrische Lagverteilung:

$$\beta_k = \beta_0 \lambda^k$$

Koyck-Modell:

$$y_t = \alpha_0 + \beta_0 x_t + \lambda y_{t-1} + u_t \,,$$

wobei

$$\begin{aligned} u_t &= v_t - \lambda v_{t-1} \\ \alpha_0 &= \alpha(1-\lambda) \,. \end{aligned}$$

Partielles Anpassungsmodell:

$$y_t^* = \mu + \delta x_t \quad \text{und} \quad y_t - y_{t-1} = (1-\lambda)(y_t^* - y_{t-1}) + v_t \,.$$

Modell adaptiver Erwartungen:

$$y_t = \mu + \delta x_{t+1}^e + v_t \quad \text{und} \quad x_{t+1}^e = x_t^e + (1-\lambda)(x_t - x_t^e)$$

Modell mit rationaler Lag-Verteilung ($K = 1$ und $M = 1$):

$$y_t = \alpha_0 + \beta_0 x_t + \mu x_{t-1} + \lambda y_{t-1} + u_t \,.$$

Fehlerkorrektur-Formulierung:

$$\Delta y_t = \beta_0 \Delta x_t - (1-\lambda)\left[y_{t-1} - \frac{\alpha_0}{1-\lambda} - \frac{\beta_0 + \mu}{1-\lambda} x_{t-1}\right] + u_t \,.$$

Interdependente Gleichungssysteme:

Ordnungskriterium: Eine Gleichung ist

unteridentifiziert, wenn	$\dot{K} - K^* < M^* - 1$,
genau identifiziert, wenn	$\dot{K} - K^* = M^* - 1$,
überidentifiziert, wenn	$\dot{K} - K^* > M^* - 1$.

$\dot{K}$ = Anzahl der system-exogenen Variablen im gesamten Gleichungssystem.

K^* = Anzahl der system-exogenen Variablen in der betrachteten Gleichung.

M^* = Anzahl der system-endogenen Variablen in der betrachteten Gleichung.

Tabelle T.2: $t_{(v)}$-Verteilung

v \ a	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005
1	3,0777	6,3138	12,7062	31,8205	63,6567
2	1,8856	2,9200	4,3027	6,9646	9,9248
3	1,6377	2,3534	3,1824	4,5407	5,8409
4	1,5332	2,1318	2,7764	3,7469	4,6041
5	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321
6	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074
7	1,4149	1,8946	2,3646	2,9980	3,4995
8	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554
9	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498
10	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693
11	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058
12	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545
13	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123
14	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768
15	1,3406	1,7531	2,1314	2,6025	2,9467
16	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208
17	1,3334	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982
18	1,3304	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784
19	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609
20	1,3253	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453
21	1,3232	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314
22	1,3212	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188
23	1,3195	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073
24	1,3178	1,7109	2,0639	2,4922	2,7969
25	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874
26	1,3150	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787
27	1,3137	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707
28	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633
29	1,3114	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564
30	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500
31	1,3095	1,6955	2,0395	2,4528	2,7440
32	1,3086	1,6939	2,0369	2,4487	2,7385
33	1,3077	1,6924	2,0345	2,4448	2,7333
34	1,3070	1,6909	2,0322	2,4411	2,7284
35	1,3062	1,6896	2,0301	2,4377	2,7238
36	1,3055	1,6883	2,0281	2,4345	2,7195
37	1,3049	1,6871	2,0262	2,4314	2,7154
38	1,3042	1,6860	2,0244	2,4286	2,7116
39	1,3036	1,6849	2,0227	2,4258	2,7079
40	1,3031	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045

QUELLE: Die Werte dieser Tabelle wurden unter Verwendung des SAS®-Befehls „*tinv*" erzeugt.

INTERPRETATION DER TABELLE: v bezeichnet die Freiheitsgrade einer $t_{(v)}$-verteilten Zufallsvariable und a das Signifikanzniveau. Die Tabelle liefert für verschiedene Freiheitsgrade v und Signifikanzniveaus a kritische Werte t_a.

BEISPIEL: Für $v = 14$ und $a = 0,05$ läßt sich ein kritischer Wert von $t_a = 1,7613$ ablesen. Das heißt:

$$Pr(t_{(14)} > 1,7613) = 0,05$$

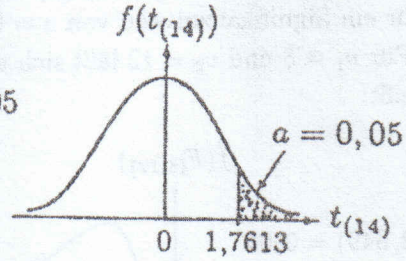


Tabelle T.3: $F_{(v_1,v_2)}$-Verteilung

v_2 \ v_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	25	30	40
1	161,448	199,500	215,707	224,583	230,162	233,986	236,768	238,883	240,543	241,882	243,906	245,950	248,013	249,260	250,095	251,143
2	18,513	19,000	19,164	19,247	19,296	19,330	19,353	19,371	19,385	19,396	19,413	19,429	19,446	19,456	19,462	19,471
3	10,128	9,552	9,277	9,117	9,013	8,941	8,887	8,845	8,812	8,786	8,745	8,703	8,660	8,634	8,617	8,594
4	7,709	6,944	6,591	6,388	6,256	6,163	6,094	6,041	5,999	5,964	5,912	5,858	5,803	5,769	5,746	5,717
5	6,608	5,786	5,409	5,192	5,050	4,950	4,876	4,818	4,772	4,735	4,678	4,619	4,558	4,521	4,496	4,464
6	5,987	5,143	4,757	4,534	4,387	4,284	4,207	4,147	4,099	4,060	4,000	3,938	3,874	3,835	3,808	3,774
7	5,591	4,737	4,347	4,120	3,972	3,866	3,787	3,726	3,677	3,637	3,575	3,511	3,445	3,404	3,376	3,340
8	5,318	4,459	4,066	3,838	3,687	3,581	3,500	3,438	3,388	3,347	3,284	3,218	3,150	3,108	3,079	3,043
9	5,117	4,256	3,863	3,633	3,482	3,374	3,293	3,230	3,179	3,137	3,073	3,006	2,936	2,893	2,864	2,826
10	4,965	4,103	3,708	3,478	3,326	3,217	3,135	3,072	3,020	2,978	2,913	2,845	2,774	2,730	2,700	2,661
11	4,844	3,982	3,587	3,357	3,204	3,095	3,012	2,948	2,896	2,854	2,788	2,719	2,646	2,601	2,570	2,531
12	4,747	3,885	3,490	3,259	3,106	2,996	2,913	2,849	2,796	2,753	2,687	2,617	2,544	2,498	2,466	2,426
13	4,667	3,806	3,411	3,179	3,025	2,915	2,832	2,767	2,714	2,671	2,604	2,533	2,459	2,412	2,380	2,339
14	4,600	3,739	3,344	3,112	2,958	2,848	2,764	2,699	2,646	2,602	2,534	2,463	2,388	2,341	2,308	2,266
15	4,543	3,682	3,287	3,056	2,901	2,790	2,707	2,641	2,588	2,544	2,475	2,403	2,328	2,280	2,247	2,204
16	4,494	3,634	3,239	3,007	2,852	2,741	2,657	2,591	2,538	2,494	2,425	2,352	2,276	2,227	2,194	2,151
17	4,451	3,592	3,197	2,965	2,810	2,699	2,614	2,548	2,494	2,450	2,381	2,308	2,230	2,181	2,148	2,104
18	4,414	3,555	3,160	2,928	2,773	2,661	2,577	2,510	2,456	2,412	2,342	2,269	2,191	2,141	2,107	2,063
19	4,381	3,522	3,127	2,895	2,740	2,628	2,544	2,477	2,423	2,378	2,308	2,234	2,155	2,106	2,071	2,026
20	4,351	3,493	3,098	2,866	2,711	2,599	2,514	2,447	2,393	2,348	2,278	2,203	2,124	2,074	2,039	1,994
21	4,325	3,467	3,072	2,840	2,685	2,573	2,488	2,420	2,366	2,321	2,250	2,176	2,096	2,045	2,010	1,965
22	4,301	3,443	3,049	2,817	2,661	2,549	2,464	2,397	2,342	2,297	2,226	2,151	2,071	2,020	1,984	1,938
23	4,279	3,422	3,028	2,796	2,640	2,528	2,442	2,375	2,320	2,275	2,204	2,128	2,048	1,996	1,961	1,914
24	4,260	3,403	3,009	2,776	2,621	2,508	2,423	2,355	2,300	2,255	2,183	2,108	2,027	1,975	1,939	1,892
25	4,242	3,385	2,991	2,759	2,603	2,490	2,405	2,337	2,282	2,236	2,165	2,089	2,007	1,955	1,919	1,872
26	4,225	3,369	2,975	2,743	2,587	2,474	2,388	2,321	2,265	2,220	2,148	2,072	1,990	1,938	1,901	1,853
27	4,210	3,354	2,960	2,728	2,572	2,459	2,373	2,305	2,250	2,204	2,132	2,056	1,974	1,921	1,884	1,836
28	4,196	3,340	2,947	2,714	2,558	2,445	2,359	2,291	2,236	2,190	2,118	2,041	1,959	1,906	1,869	1,820
29	4,183	3,328	2,934	2,701	2,545	2,432	2,346	2,278	2,223	2,177	2,104	2,027	1,945	1,891	1,854	1,806
30	4,171	3,316	2,922	2,690	2,534	2,421	2,334	2,266	2,211	2,165	2,092	2,015	1,932	1,878	1,841	1,792
31	4,160	3,305	2,911	2,679	2,523	2,409	2,323	2,255	2,199	2,153	2,080	2,003	1,920	1,866	1,828	1,779
32	4,149	3,295	2,901	2,668	2,512	2,399	2,313	2,244	2,189	2,142	2,070	1,992	1,908	1,854	1,817	1,767
33	4,139	3,285	2,892	2,659	2,503	2,389	2,303	2,235	2,179	2,133	2,060	1,982	1,898	1,844	1,806	1,756
34	4,130	3,276	2,883	2,650	2,494	2,380	2,294	2,225	2,170	2,123	2,050	1,972	1,888	1,833	1,795	1,745
35	4,121	3,267	2,874	2,641	2,485	2,372	2,285	2,217	2,161	2,114	2,041	1,963	1,878	1,824	1,786	1,735
36	4,113	3,259	2,866	2,634	2,477	2,364	2,277	2,209	2,153	2,106	2,033	1,954	1,870	1,815	1,776	1,726
37	4,105	3,252	2,859	2,626	2,470	2,356	2,270	2,201	2,145	2,098	2,025	1,946	1,861	1,806	1,768	1,717
38	4,098	3,245	2,852	2,619	2,463	2,349	2,262	2,194	2,138	2,091	2,017	1,939	1,853	1,798	1,760	1,708
39	4,091	3,238	2,845	2,612	2,456	2,342	2,255	2,187	2,131	2,084	2,010	1,931	1,846	1,791	1,752	1,700
40	4,085	3,232	2,839	2,606	2,449	2,336	2,249	2,180	2,124	2,077	2,003	1,924	1,839	1,783	1,744	1,693

QUELLE: Die Werte dieser Tabelle wurden unter Verwendung des SAS®-Befehls „*finv*" erzeugt.

INTERPRETATION DER TABELLE: v_1 bezeichnet die Freiheitsgrade im Zähler und v_2 im Nenner einer $F_{(v_1,v_2)}$-verteilten Zufallsvariable. Die Tabelle liefert für verschiedene Kombinationen von Freiheitsgraden (v_1 und v_2) kritische Werte F_a, und zwar ausschließlich für ein Signifikanzniveau von $a = 0,05$.

BEISPIEL: Für $v_1 = 8$ und $v_2 = 12$ läßt sich ein kritischer Wert von $F_{0,05} = 2,849$ ablesen. Das heißt:

$$Pr(F_{(8,12)} > 2,849) = 0,05$$

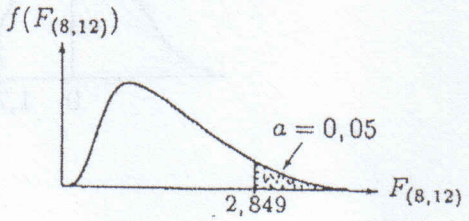


Tabelle T.4: $\chi^2_{(v)}$-Verteilung

v \ a	0,995	0,990	0,975	0,95	0,90	0,50	0,10	0,05	0,025	0,010	0,005
1	0,00004	0,00016	0,00098	0,00393	0,01579	0,45494	2,70554	3,84146	5,02389	6,63490	7,87944
2	0,01003	0,02010	0,05064	0,10259	0,21072	1,38629	4,60517	5,99146	7,37776	9,21034	10,5966
3	0,07172	0,11483	0,21580	0,35185	0,58437	2,36597	6,25139	7,81473	9,34840	11,3449	12,8382
4	0,20699	0,29711	0,48442	0,71072	1,06362	3,35669	7,77944	9,48773	11,1433	13,2767	14,8603
5	0,41174	0,55430	0,83121	1,14548	1,61031	4,35146	9,23636	11,0705	12,8325	15,0863	16,7496
6	0,67573	0,87209	1,23734	1,63538	2,20413	5,34812	10,6446	12,5916	14,4494	16,8119	18,5476
7	0,98926	1,23904	1,68987	2,16735	2,83311	6,34581	12,0170	14,0671	16,0128	18,4753	20,2777
8	1,34441	1,64650	2,17973	2,73264	3,48954	7,34412	13,3616	15,5073	17,5345	20,0902	21,9550
9	1,73493	2,08790	2,70039	3,32511	4,16816	8,34283	14,6837	16,9190	19,0228	21,6660	23,5894
10	2,15586	2,55821	3,24697	3,94030	4,86518	9,34182	15,9872	18,3070	20,4832	23,2093	25,1882
11	2,60322	3,05348	3,81575	4,57481	5,57778	10,3410	17,2750	19,6751	21,9200	24,7250	26,7568
12	3,07382	3,57057	4,40379	5,22603	6,30380	11,3403	18,5493	21,0261	23,3367	26,2170	28,2995
13	3,56503	4,10692	5,00875	5,89186	7,04150	12,3398	19,8119	22,3620	24,7356	27,6882	29,8195
14	4,07467	4,66043	5,62873	6,57063	7,78953	13,3393	21,0641	23,6848	26,1189	29,1412	31,3193
15	4,60092	5,22935	6,26214	7,26094	8,54676	14,3389	22,3071	24,9958	27,4884	30,5779	32,8013
16	5,14221	5,81221	6,90766	7,96165	9,31224	15,3385	23,5418	26,2962	28,8454	31,9999	34,2672
17	5,69722	6,40776	7,56419	8,67176	10,0852	16,3382	24,7690	27,5871	30,1910	33,4087	35,7185
18	6,26480	7,01491	8,23075	9,39046	10,8649	17,3379	25,9894	28,8693	31,5264	34,8053	37,1565
19	6,84397	7,63273	8,90652	10,1170	11,6509	18,3377	27,2036	30,1435	32,8523	36,1909	38,5823
20	7,43384	8,26040	9,59078	10,8508	12,4426	19,3374	28,4120	31,4104	34,1696	37,5662	39,9968
21	8,03365	8,89720	10,2829	11,5913	13,2396	20,3372	29,6151	32,6706	35,4789	38,9322	41,4011
22	8,64272	9,54249	10,9823	12,3380	14,0415	21,3370	30,8133	33,9244	36,7807	40,2894	42,7957
23	9,26042	10,1957	11,6886	13,0905	14,8480	22,3369	32,0069	35,1725	38,0756	41,6384	44,1813
24	9,88623	10,8564	12,4012	13,8484	15,6587	23,3367	33,1962	36,4150	39,3641	42,9798	45,5585
25	10,5197	11,5240	13,1197	14,6114	16,4734	24,3366	34,3816	37,6525	40,6465	44,3141	46,9279
26	11,1602	12,1981	13,8439	15,3792	17,2919	25,3365	35,5632	38,8851	41,9232	45,6417	48,2899
27	11,8076	12,8785	14,5734	16,1514	18,1139	26,3363	36,7412	40,1133	43,1945	46,9629	49,6449
28	12,4613	13,5647	15,3079	16,9279	18,9392	27,3362	37,9159	41,3371	44,4608	48,2782	50,9934
29	13,1211	14,2565	16,0471	17,7084	19,7677	28,3361	39,0875	42,5570	45,7223	49,5879	52,3356
30	13,7867	14,9535	16,7908	18,4927	20,5992	29,3360	40,2560	43,7730	46,9792	50,8922	53,6720
31	14,4578	15,6555	17,5387	19,2806	21,4336	30,3359	41,4217	44,9853	48,2319	52,1914	55,0027
32	15,1340	16,3622	18,2908	20,0719	22,2706	31,3359	42,5847	46,1943	49,4804	53,4858	56,3281
33	15,8153	17,0735	19,0467	20,8665	23,1102	32,3358	43,7452	47,3999	50,7251	54,7755	57,6484
34	16,5013	17,7891	19,8063	21,6643	23,9523	33,3357	44,9032	48,6024	51,9660	56,0609	58,9639
35	17,1918	18,5089	20,5694	22,4650	24,7967	34,3356	46,0588	49,8018	53,2033	57,3421	60,2748
36	17,8867	19,2327	21,3359	23,2686	25,6433	35,3356	47,2122	50,9985	54,4373	58,6192	61,5812
37	18,5858	19,9602	22,1056	24,0749	26,4921	36,3355	48,3634	52,1923	55,6680	59,8925	62,8833
38	19,2889	20,6914	22,8785	24,8839	27,3430	37,3355	49,5126	53,3835	56,8955	61,1621	64,1814
39	19,9959	21,4262	23,6543	25,6954	28,1958	38,3354	50,6598	54,5722	58,1201	62,4281	65,4756
40	20,7065	22,1643	24,4330	26,5093	29,0505	39,3353	51,8051	55,7585	59,3417	63,6907	66,7660

QUELLE: Die Werte dieser Tabelle wurden unter Verwendung des SAS®-Befehls „*cinv*" erzeugt.

INTERPRETATION DER TABELLE: v bezeichnet die Freiheitsgrade einer $\chi^2_{(v)}$-verteilten Zufallsvariable und a das Signifikanzniveau. Die Tabelle liefert für verschiedene Freiheitsgrade v und Signifikanzniveaus a kritische Werte χ^2_a.

BEISPIEL: Für $v = 10$ und $a = 0,05$ läßt sich ein kritischer Wert von $\chi^2_{0,05} = 18,3070$ ablesen. Das heißt:

$$Pr(\chi^2_{(10)} > 18,3070) = 0,05$$

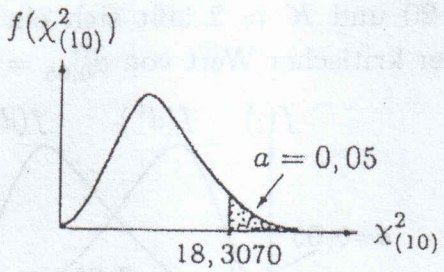


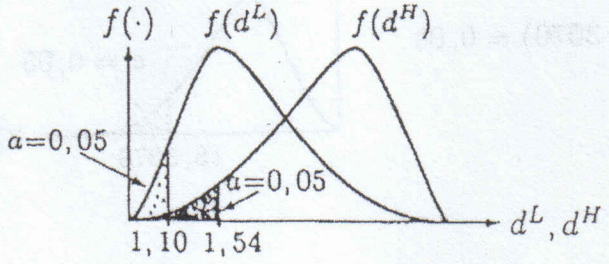
Tabelle T.5: Durbin-Watson Statistik

	K=1		K=2		K=3		K=4		K=5	
T	$d^L_{0,05}$	$d^H_{0,05}$	$d^L_{0,05}$	$d^H_{0,05}$	$d^L_{0,05}$	$d^H_{0,05}$	$d^L_{0,05}$	$d^H_{0,05}$	$d^L_{0,05}$	$d^H_{0,05}$
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75	0,69	1,97	0,56	2,21
16	1,10	1,37	0,98	1,54	0,86	1,73	0,74	1,93	0,62	2,15
17	1,13	1,38	1,02	1,54	0,90	1,71	0,78	1,90	0,67	2,10
18	1,16	1,39	1,05	1,53	0,93	1,69	0,82	1,87	0,71	2,06
19	1,18	1,40	1,08	1,53	0,97	1,68	0,86	1,85	0,75	2,02
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,90	1,83	0,79	1,99
21	1,22	1,42	1,13	1,54	1,03	1,67	0,93	1,81	0,83	1,96
22	1,24	1,43	1,15	1,54	1,05	1,66	0,96	1,80	0,86	1,94
23	1,26	1,44	1,17	1,54	1,08	1,66	0,99	1,79	0,90	1,92
24	1,27	1,45	1,19	1,55	1,10	1,66	1,01	1,78	0,93	1,90
25	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,66	1,04	1,77	0,95	1,89
26	1,30	1,46	1,22	1,55	1,14	1,65	1,06	1,76	0,98	1,88
27	1,32	1,47	1,24	1,56	1,16	1,65	1,08	1,76	1,01	1,86
28	1,33	1,48	1,26	1,56	1,18	1,65	1,10	1,75	1,03	1,85
29	1,34	1,48	1,27	1,56	1,20	1,65	1,12	1,74	1,05	1,84
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83
31	1,36	1,50	1,30	1,57	1,23	1,65	1,16	1,74	1,09	1,83
32	1,37	1,50	1,31	1,57	1,24	1,65	1,18	1,73	1,11	1,82
33	1,38	1,51	1,32	1,58	1,26	1,65	1,19	1,73	1,13	1,81
34	1,39	1,51	1,33	1,58	1,27	1,65	1,21	1,73	1,15	1,81
35	1,40	1,52	1,34	1,58	1,28	1,65	1,22	1,73	1,16	1,80
36	1,41	1,52	1,35	1,59	1,29	1,65	1,24	1,73	1,18	1,80
37	1,42	1,53	1,36	1,59	1,31	1,66	1,25	1,72	1,19	1,80
38	1,43	1,54	1,37	1,59	1,32	1,66	1,26	1,72	1,21	1,79
39	1,43	1,54	1,38	1,60	1,33	1,66	1,27	1,72	1,22	1,79
40	1,44	1,54	1,39	1,60	1,34	1,66	1,29	1,72	1,23	1,79
45	1,48	1,57	1,43	1,62	1,38	1,67	1,34	1,72	1,29	1,78
50	1,50	1,59	1,46	1,63	1,42	1,67	1,38	1,72	1,34	1,77
55	1,53	1,60	1,49	1,64	1,45	1,68	1,41	1,72	1,38	1,77
60	1,55	1,62	1,51	1,65	1,48	1,69	1,44	1,73	1,41	1,77
65	1,57	1,63	1,54	1,66	1,50	1,70	1,47	1,73	1,44	1,77
70	1,58	1,64	1,55	1,67	1,52	1,70	1,49	1,74	1,46	1,77
75	1,60	1,65	1,57	1,68	1,54	1,71	1,51	1,74	1,49	1,77
80	1,61	1,66	1,59	1,69	1,56	1,72	1,53	1,74	1,51	1,77
85	1,62	1,67	1,60	1,70	1,57	1,72	1,55	1,75	1,52	1,77
90	1,63	1,68	1,61	1,70	1,59	1,73	1,57	1,75	1,54	1,78
95	1,64	1,69	1,62	1,71	1,60	1,73	1,58	1,75	1,56	1,78
100	1,65	1,69	1,63	1,72	1,61	1,74	1,59	1,76	1,57	1,78

QUELLE: J. Durbin und G. S. Watson (1951).

INTERPRETATION DER TABELLE: T bezeichnet die Anzahl der Beobachtungen und K die Anzahl der exogenen Variablen, die in die d-verteilte Zufallsvariable eingehen. Die Tabelle liefert für verschiedene K und T untere kritische Werte d^L_a und obere kritische Werte d^H_a, und zwar ausschließlich für ein Signifikanzniveau von $a = 0,05$.

BEISPIEL: Für $T = 20$ und $K = 2$ läßt sich ein unterer kritischer Wert von $d^L_{0,05} = 1,10$ und ein oberer kritischer Wert von $d^H_{0,05} = 1,54$ ablesen. Das heißt:

$$Pr(d^L \leq 1,10) = 0,05$$

$$Pr(d^H \leq 1,54) = 0,05$$