Prof. Dr. Rainer Schwabe
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Institut für Mathematische Stochastik

08.02.2013

Klausur - Schätzen und Testen - Wintersemester 2012/13

Name: ______________________________, Vorname: ______________________________

Matr.-Nr. ________________________

Hinweise: (Bitte lesen Sie diese Hinweise genau durch.)

- Bitte tragen Sie als erstes Ihre persönlichen Daten auf dieser Seite **und** auf dem Deckblatt des ausgegebenen Materials, in das Sie Ihre Lösungen schreiben, ein.
- Zugelassene Hilfsmittel: Ein beidseitig mit der Hand beschriebenes DIN-A4-Blatt (Markierungen sind erlaubt), ein (vom WiWi-Prüfungsamt erlaubter) Taschenrechner, der bereit gestellte (aktualisierte) Formelzettel mit den Tabellen (ohne Ergänzungen; Markierungen sind erlaubt) sowie ein Geodreieck (oder Lineal und Winkelmesser).
- Die Klausur besteht aus **6** Aufgaben. Insgesamt sind maximal **34** Punkte erreichbar.
- Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie insgesamt **mindestens 14** Punkte erreicht haben.
- Die Lösung einer Aufgabe (außer Aufgabe 1) bedeutet nicht einfach die Angabe eines Ergebnisses, sondern erfordert Begründungen, die den Lösungsweg nachvollziehbar machen.
- Interpretieren Sie die statistischen Ergebnisse und geben Sie dort, wo sinnvoll, einen Antwortsatz an.
- Bitte markieren Sie deutlich in den Lösungen, wo eine Aufgabe beginnt und wo sie endet. Mehrfache Antworten bei einer Frage werden als falsch beantwortet bewertet. Kennzeichnen Sie daher Korrekturen oder Streichungen deutlich.

Aufgabe 1 (4 Punkte)
In jeder Teilaufgabe ist **genau eine** Antwort richtig.
Für eine korrekte Antwort erhalten Sie einen Punkt. Für eine falsche Antwort oder eine nicht beantwortete Frage erhalten Sie weder einen Punkt noch wird Ihnen etwas abgezogen. Mehrfachantworten werden als falsch gewertet.

a) Sei X eine stetige Zufallsvariable. Dann gilt:

- ☐ Die Dichtefunktion $f_X(x)$ ist stetig.
- ☐ $P(X = \mu) = 0{,}5$.
- ☐ Die Verteilungsfunktion F_X ist immer monoton wachsend.
- ☐ Der Graph der Verteilungsfunktion ist eine Treppenfunktion.
- ☐ $P(X \leq x) = F_X(X \leq x)$.

b) Es gilt:

- ☐ $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.
- ☐ Für beliebige Ereignisse A und B gilt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- ☐ $Var(aX + c) = a^2 Var(X) + c$.
- ☐ X sei eine diskrete Zufallsvariable: $P(a \leq X < b) = F_X(b) - F_X(a)$.
- ☐ X, Y seien beliebige Zufallsvaiablen: $E(XY) = E(X)E(Y)$.

c) Es gilt:

- ☐ Die Kenngröße $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ ist ein erwartungstreuer Schätzer für die Varianz σ^2 der Grundgesamtheit.
- ☐ $\hat{g}_1, \hat{g}_2$ seien Schätzer für $g(\theta)$.
  $\hat{g}_1$ ist effizienter als $\hat{g}_2$, wenn $MSE(\hat{g}_1; \theta) \leq MSE(\hat{g}_2; \theta)$ für alle θ.
- ☐ Im Normalverteilungsmodell gilt für den erwartungstreuen Schätzer $\overline{X}$ des Erwartungswertes μ: $P(\overline{X} = \mu) > 0$.
- ☐ Schätzer sind keine Zufallsvariablen.
- ☐ Likelihood-Funktionen von diskreten Zufallsvariablen sind nicht stetig.

d) Es gilt:

- ☐ Lehnt ein Test auf dem Niveau α die Nullhypothese H_0 eines Testproblems nicht ab, so sprechen die Daten signifikant für H_0.
- ☐ Der Fehler 1. Art ist immer kleiner als das Signifikanzniveau α.
- ☐ Der p-Wert ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei gegebenen Daten die Nullhypothese richtig ist.
- ☐ Die Testgrößen beim Test auf Korrelation ($H_0 : \rho_{xy} = 0$) und auf Steigung gleich Null ($H_0 : b = 0$) stimmen überein.
- ☐ Gilt $\rho_{xy} = 0$, dann besteht kein Zusammenhang zwischen X und Y.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Von einer Maschine gibt es Ausführungen mit zwei und mit vier Bauteilen.

a) Während einer Arbeitswoche fallen die Bauteile unabhängig voneinander, jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}03$ aus. Die Maschine kann weiter arbeiten, wenn mindestens die Hälfte der Bauteile funktioniert. Fällt dann eher eine Maschine mit zwei oder mit vier Bauteilen aus? Geben Sie jeweils ein geeignetes stochastisches Modell an.

b) Die Maschine stellt Zulieferteile in großer Anzahl her. Stichproben haben gezeigt, dass 5% der Zulieferteile Aussschuss sind. Berechnen Sie **näherungsweise** die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Lieferung von 5000 Zulieferteilen mehr als 280 Teile Ausschuss sind.

   Hinweis: Nutzen Sie den Zentralen Grenzwertsatz (mit Stetigkeitskorrektur).

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Sie sind Qualitätsmanager bei einem großen Süßwarenhersteller, der das Produkt „Gummi-Grizzly“ in 2 verschiedenen Packungen anbietet. Das Produkt gibt es in 5 verschiedenen Farben. Bei der Ausgangskontrolle einer Bestellung wurden folgende Daten notiert:

Packung	weiß	gelb	orange	grün	rot	Σ
„Gummibären“	44	46	37	28	78	233
„Farbe-Rado“	17	19	20	15	27	98

a) Testen Sie zum Niveau $\alpha = 10\%$, ob anteilsmäßig gleich viele rote „Gummi-Grizzlys“ in den verschiedenen Packungen enthalten sind.

b) Bestimmen Sie ein approximatives Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 0,90 für den Anteil der orangenen „Gummi-Grizzlys“ in der Packung „Farbe-Rado“.

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Aus Erfahrung sei bekannt, dass man die Brenndauer in Stunden einer bestimmten Sorte von Glühbirnen gut durch eine stetige Zufallsvarible mit Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} 2\theta x \cdot e^{-\theta x^2} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0, \end{cases}$$

beschreiben kann, wobei $\theta > 0$.
Von 8 dieser Glühbirnen wurde unabhängig voneinander die Brenndauer ermittelt:

1530; 1173; 1832; 1075; 1539; 998; 2083; 693.

a) Schätzen Sie das für diese Sorte von Glühbirnen passende θ mittels der Maximum-Likelihood-Methode.

b) Geben Sie die Verteilungsfunktion für X für ein allgemeines $\theta > 0$ an.
Berechnen Sie für $\theta = 5 \cdot 10^{-7}$
(i) $P(X > 150)$,
(ii) $P(X \leq 1500)$.

Hinweis: $\int_a^b g'(x)e^{g(x)}dx = e^{g(x)}\big|_a^b$.

Aufgabe 5 (5 Punkte)
Sie sind der verantwortliche Produktionsmanager für zwei Fertigungsstätten zur Parfümherstellung. Für einen Vergleich der beiden Standorte wurden bei beiden Produktionsstätten jeweils 21 Tage zufällig ausgewählt und die Produktionsmengen (in 1000 Schachteln) ermittelt (x_i: Fertigungsstätte A, y_i: Fertigungsstätte B):

x_i	83,432	65,208	79,173	77,991	70,414	59,359	67,140
y_i	78,906	65,392	82,141	86,302	81,153	77,651	67,833
x_i	79,704	88,762	90,111	72,854	75,604	68,363	77,558
y_i	78,712	74,901	78,134	92,784	64,294	81,370	75,458
x_i	81,696	78,552	95,703	82,368	67,689	62,386	76,840
y_i	75,538	82,500	75,279	82,886	77,180	67,648	79,756

Hiermit ergibt sich: $\overline{x}$=76,233, s_x=9,329, $\overline{y}$=77,420, s_y=6,910, s_{x-y}=10,372

a) Sind die Daten im Einklang mit der Annahme, dass die Varianz beider Fabriken in der täglichen Produktionsmenge gleich ist?
Geben Sie Ihr Modell an und testen Sie zum Niveau $\alpha = 0{,}05$.

b) Sind die durchschnittlichen täglichen Produktionsmengen gleich?
Geben Sie Ihr Modell an und testen Sie zum Niveau $\alpha = 0{,}05$.
Hinweis: Wir nehmen $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ an.

Aufgabe 6 (7 Punkte)
Wir untersuchen den Zusammenhang zwischen der Unternehmensgröße (Anzahl x_i der Mitarbeiter) und dem Umsatz (y_i in Mio. CHF) anhand der Daten von 11 Schweizer Unternehmen aus der Süßwarenbranche:

Mitarbeiter	x_i	230	180	319	200	126	81	60	20	21	165	24
Umsatz	y_i	71	33	92	29	27	12	10	10	8	38	7

Demnach ergibt sich:

$$\overline{x}=129{,}6\ , \quad \overline{y}=30{,}6\ , \quad \sum_{i=1}^{11}(x_i-\overline{x})^2=96878{,}6\ , \quad \sum_{i=1}^{11}(y_i-\overline{y})^2=7740{,}6\ ,$$

$$\sum_{i=1}^{11}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=25510{,}6\ , \quad s_r=10{,}66 \text{ (Schätzung für } \sigma).$$

a) Passen Sie eine Regressionsgerade für den Umsatz in Abhängigkeit von der Mitarbeiterzahl an und interpretieren Sie die Parameter, soweit dies sinnvoll ist.

b) Geben Sie ein 90%-Konfidenzintervall für den Steigungskoeffizienten an, und überprüfen Sie, ob der Einfluss der Mitarbeiterzahl auf den Umsatz signifikant ist (α=0,1).

c) Geben Sie einen Vorhersagewert für den zukünftigen Umsatz bei einer neuen Firma mit 50 Mitarbeitern an, und bestimmen Sie für diesen Umsatz einen Vorhersagebereich zum 95%-Niveau.