

## Klausur zur Vorlesung „Schätzen und Testen“ - 2008/09

---

Bitte beachten Sie:

- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben, für die jeweils eine maximale Anzahl von Punkten erreichbar ist. Insgesamt sind maximal 35 Punkte erreichbar. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie insgesamt mindestens 14 Punkte erreicht haben.
  - Der Multiple-Choice-Teil (Aufgabe 1) wird mit mindestens 0 Punkten bewertet. Falsche Antworten im Multiple-Choice-Teil werden mit einem halben Minuspunkt bewertet. Für richtige Antworten bekommt man einen Pluspunkt. Nicht beantwortete Teilaufgaben werden nicht gewertet.
  - Die Lösung einer Aufgabe (außer Aufgabe 1) bedeutet nicht einfach die Angabe eines Ergebnisses, sondern erfordert Begründungen, die den Lösungsweg nachvollziehbar machen. Es wird gegebenenfalls auch eine Interpretation des Ergebnisses gefordert. Bitte markieren Sie deutlich in den Lösungen, wo eine Aufgabe beginnt und wo sie endet.
  - Vergessen Sie nicht, das beiliegende Arbeitsblatt zu beschriften und Ihren Lösungen beizulegen.
- 
- 

### Aufgabe 1 (4 Punkte)

In jeder Teilaufgabe ist genau eine Antwort richtig.

a) Für stetige Zufallsvariablen  $X$  gilt:

- Modalwert und Median sind identisch.
- Die Dichtefunktion  $f_X(x)$  ist stetig.
- Die Dichtefunktion  $f_X(x)$  nimmt nur Werte zwischen 0 und 1 an.
- Quantile stetiger Zufallsvariablen sind immer positiv.
- Die Verteilungsfunktion  $F_X(x)$  ist immer monoton steigend.

b) Für Schätzer gilt:

- Maximum-Likelihood-Schätzer haben einen  $Bias = 0$ .
- Die Verfälschung ( $Bias$ ) kann nicht negativ ( $< 0$ ) sein.
- Sei  $\hat{\mu}_1$  ein erwartungstreuer Schätzer und  $\hat{\mu}_2$  kein erwartungstreuer Schätzer für  $\mu$ . Dann gilt  $Var(\hat{\mu}_2) > Var(\hat{\mu}_1)$ .
- Schätzer sind Zufallsvariablen.
- Likelihoodfunktionen von diskreten Zufallsvariablen sind nicht stetig.

- c)  Überschreitet der  $p$ -Wert  $\alpha$ , dann wird die Nullhypothese abgelehnt.  
 Lehnt ein Niveau- $\alpha$ -Test die Nullhypothese  $H_0$  eines Testproblem es nicht ab, so sprechen die Daten signifikant für  $H_0$ .  
 Ist der  $p$ -Wert kleiner als  $\alpha$ , dann wird die Nullhypothese abgelehnt.  
 Wird bei einem Test auf Korrelation die Nullhypothese  $\rho_{xy} \geq 0$  abgelehnt, dann sind die Daten signifikant unkorreliert.  
 Keine der ersten 4 Antwortmöglichkeiten ist richtig.
- d) Für Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  gilt:
- Gilt  $\rho_{xy} = 0$ , dann besteht kein Zusammenhang zwischen  $X$  und  $Y$ .  
 Bei Ursache-Wirkungszusammenhängen ist die Korrelation hoch ( $\rho_{xy} \approx 1$ ).  
 Ausreißer in den Daten wirken sich nicht auf den Korrelationskoeffizienten aus.  
 Ist der Rangkorrelationskoeffizient  $r_{S,xy} = 0$ , dann besteht kein Zusammenhang zwischen  $X$  und  $Y$ .  
 Die Testgrößen beim Test auf Korrelation ( $H_0 : \rho_{xy} = 0$ ) und auf Steigung gleich Null ( $H_0 : b = 0$ ) stimmen überein.

### Aufgabe 2 (6 Punkte)

Eine diskrete Zufallsvariable  $X$  heißt negativ-binomial-verteilt mit den Parametern  $r$  und  $p$  ( $X \sim NB(r, p)$ ), wenn für die diskrete Dichte gilt:

$$p_X(x) = P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r} \text{ für } x \geq r, x \in \mathbb{N}.$$

Seien  $X_1$  und  $X_2$  unabhängig und  $NB(r, p)$  verteilt mit  $r = 3$ . Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für  $p$  und ferner eine Maximum-Likelihood-Schätzer, wenn sich als Realisierungen  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = 6$  ergeben. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten von  $x_1$  bzw. von  $x_2$ , wenn  $p = 0.5$  gilt.

### Aufgabe 3 (6 Punkte)

Ihre Firma stellt Zahnräder in großen Mengen in 3 Schichten her. Abhängig von der Schicht werden 15, 10 bzw. 25 Zahnräder aus der Produktion entnommen und gründlich untersucht. Man geht davon aus, dass in jeder Schicht gleich zuverlässig produziert wird. Sie nutzen als Ihren Standardschätzer für den Ausschussanteil der Produktion den Schätzer

$$\hat{p}_1 = \frac{1}{50}(X_1 + X_2 + X_3),$$

wobei  $X_i$  den beobachteten Ausschuss in der Schicht  $i$  beschreibt.

Der neue Praktikant in der Qualitätssicherung behauptet, dass unabhängig von der Stichprobengröße die relativen Häufigkeiten aller Stichproben gleich gewichtet werden sollten.

Sein vorgeschlagener Schätzer hat die Form

$$\hat{p}_2 = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{15} X_1 + \frac{1}{10} X_2 + \frac{1}{25} X_3 \right).$$

- Wie sind  $X_1$ ,  $X_2$  und  $X_3$  verteilt?
  - Sind die Schätzer erwartungstreu?
  - Berechnen Sie den  $MSE$  der beiden Schätzer. Würden Sie dem Praktikanten zustimmen?
- 

**Aufgabe 4** (6 Punkte)

Sie sind Qualitätsmanager bei einem großen Süßwarenhersteller, der das Produkt „Gummi-Grizzly“ in 2 verschiedenen Packungen anbietet. Das Produkt gibt es in 5 verschiedenen Farben. Bei der Ausgangskontrolle einer Bestellung wurden folgende Daten notiert:

Packung	weiß	gelb	orange	grün	rot	$\Sigma$
Gummibären	39	51	32	23	73	218
Farbe-Rado	11	13	14	9	21	68

- Testen Sie zum Niveau  $\alpha = 10\%$  ob anteilmäßig gleich viele rote „Gummi-Grizzlys“ in den verschiedenen Packungen enthalten sind.
  - Ihre Produktion ist so eingestellt, dass die „Gummi-Grizzlys“ in allen Farben gleich häufig produziert werden. Berechnen Sie mit einer sehr guten Näherung die Wahrscheinlichkeit, dass aus einer Gummibärenpackung mit 225 Bären mehr als 43 Bären rot sind.
- 

**Aufgabe 5** (5 Punkte)

Die Änderung (in %) der Aktienkurse von 2007 auf 2009 von 8 *DAX*-Unternehmen und 8 *Dow-Jones*-Unternehmen wurden beobachtet. Bezeichne  $x_i$  die Änderung der Kurse der *DAX*-Unternehmen und  $y_i$  die der *Dow-Jones*-Unternehmen. Es wird angenommen, dass die Varianzen der Änderung der Aktienkurse sich zwischen den Märkten nicht unterscheiden.

$x_i$	2.2	6.4	3.6	5.2	4.3	2.9	4.0	4.2
$y_i$	5.1	1.5	4.2	4.5	3.5	3.4	4.9	3.3

Aus diesen Daten ergeben sich die folgenden Kenngrößen:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 4.1 & \bar{y} &= 3.8 & \bar{d} &= 0.3 \\ s_x^2 &= 1.6943 & s_y^2 &= 1.3343 & s_d^2 &= 5.0086 \\ s_{xy} &= -0.9900 & s_{xd} &= 2.6843 & s_{yd} &= -2.3243 \end{aligned}$$

- Formulieren Sie geeignete Modellannahmen und testen Sie zum Niveau  $\alpha = 0.1$ , ob ein signifikanter Unterschied zwischen den Änderungen der Aktienkurse der *DAX*- und *Dow-Jones*-Unternehmen vorliegt.
- Berechnen Sie das 95%-Konfidenzintervall für die Differenz der Mittelwerte der Aktienkursänderungen.

### Aufgabe 6 (8 Punkte)

Wir untersuchen den Zusammenhang zwischen der durchschnittlichen Minimaltemperatur ( $x_i$  in  $^{\circ}C$ ) und der durchschnittlichen Niederschlagsmenge ( $y_i$  in  $cm$ ) eines Monats in Magdeburg. Dazu wurden aus 12 Monaten die folgenden Daten zusammengetragen:

$x_i$	-1	0	1	4	9	11	13	13	10	6	2	0
$y_i$	3.65	2.85	3.62	3.28	4.87	5.64	6.24	5.86	4.5	3.74	3.88	4.42

Aus diesen Daten ergeben sich die folgenden Maßzahlen:

$$\bar{x} = 5.67, \bar{y} = 4.38, s_x^2 = 28.4242, s_y^2 = 1.1650, s_{xy} = 4.8797, s_r^2 = 0.3600.$$

- Passen Sie eine Regressionsgerade für die Niederschlagsmenge in Abhängigkeit von der durchschnittlichen Minimaltemperatur an und interpretieren Sie die Parameter, soweit dies sinnvoll ist.
- Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten und testen Sie auf Unkorreliertheit zum Niveau  $\alpha = 0.05$ .
- Bestimmen Sie eine Punktschätzung für die durchschnittliche Niederschlagsmenge eines Monats mit durchschnittlicher Minimaltemperatur von  $13^{\circ}C$ . Bestimmen Sie ein 95%-Vorhersageintervall für die durchschnittliche Niederschlagsmenge dieses Monats.