

19.07.2013

(1) Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccc} -1 & -5 & 3 & x & & 4 \\ -2 & -7 & 0 & y & = & 5 \\ -1 & -4 & h & z & & 3 \end{array}$$

- (a) (4 Punkte) Für welche reellen Zahlen h hat das Gleichungssystem genau eine Lösung?
 (b) (4 Punkte) Lösen Sie das Gleichungssystem für $h = 1$.
 (c) (2 Punkte) Berechnen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix $h = -3$.

(2) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unter der Annahme, dass der Grenzwert existiert, für:

- (a) (4 Punkte) $a_n = \frac{3n^3}{(n-1)(3+2n)^2}$ für $n \geq 1$.
 (b) (6 Punkte) $a_1 = 0$ und $a_{n+1} = \frac{15 + a_n}{3 + a_n}$ für $n \geq 1$.

(3) (a) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass gilt

$$\frac{dx}{(\sin x)^2} = -\frac{1}{\tan x} + C,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist.

(b) (5 Punkte) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 \ln(x-1) + x - 2}{x^2 + 2x - 8}.$$

- (4) (a) (2 Punkte) Es ist geplant, in 10 Jahren ein Auto für 9250 zu kaufen. Die Bank bietet Ihnen einen konstanten Zinssatz von 5% jährlich an. Geben Sie eine Formel für das benötigte Startkapital (unter Berücksichtigung des Zinseszins-effekts) an.
 (b) (5 Punkte) Ist das Startkapital in (a) größer als 6000?
 (c) (3 Punkte) Berechnen Sie $\sum_{i=0}^9 11^i$, wobei Sie $11^{10} = 25\,937\,424\,601$ benutzen dürfen.

Bitte wenden.

(5) (a) (4 Punkte) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$. Ordnen Sie die Funktionen

$$f(2x), \quad 2f(x), \quad 2f(2x), \quad f(x+2)$$

den unten abgebildeten Graphen zu. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

(b) (6 Punkte) Man finde zwei nichtnegative reelle Zahlen, deren Summe 3 ist und für die das Produkt aus der einen Zahl und dem Quadrat der anderen Zahl maximal ist.

